Corrigé de l'exercice n° 8

Rappels préalables :

• **Les unités de base** : Le système international d'unités (S.I.) est fondé sur les 7 unités de base données par le tableau qui suit.

Grandeur fondamentale	**Nom de l'unité de base**	**Symbole de l'unité**	Dimension
Temps	seconde	s	T
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Intensité de courant électrique	ampère	A	I
Température thermodynamique	kelvin	K	Θ
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

• **Equation aux dimensions**

A chaque grandeur fondamentale, on associe une dimension de base :

M pour la masse ; L pour la longueur ; T pour la durée, …(en grisé sur le tableau ci-dessus)

La dimension d'une grandeur dérivée (donc ne faisant pas partie des grandeurs fondamentales) s'exprime, alors, par un produit de puissances des dimensions de base.

L'équation aux dimensions d'une grandeur physique dérivée A s'écrit, a priori, dans ce système S.I. :

$$\dim.A = [\,A\,] = L^{\alpha}.M^{\beta}.T^{\delta}.I^{\varepsilon}.\Theta^{\varphi}.N^{\upsilon}.J^{\tau}$$

Ce produit est souvent appelé « **équation aux dimensions** ».

Certains exposants peuvent être nuls ; dans ce cas, la ou les grandeurs fondamentales concernées sont exclues de l'équation aux dimensions.

Rappel : $X^0 = 1 = Y^0 = Z^0 = ...$ et ceci, $\forall\, X, Y, Z, ...$

Comment trouver la dimension d'une grandeur ?

Réponse : Il faut utiliser une ou des relations entre cette grandeur et les grandeurs fondamentales.

Exemple 1 : $\text{vitesse} = \dfrac{\text{longueur}}{\text{durée}}$ $\quad$ [longueur] = L ; [durée] = T.

La vitesse a, alors, pour équation aux dimensions : $L.T^{-1}$.

1. La dimension d'une grandeur est notée : [grandeur]

◆ $\text{vitesse} = \dfrac{\text{longueur}}{\text{durée}}$; [longueur] = L ; [durée] = T

La vitesse a, alors, pour équation aux dimensions : $\boxed{L.T^{-1}}$

◆ $\text{masse volumique} = \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$; [masse] = M ; [volume] = L^3

La masse volumique a pour équation aux dimensions : $\boxed{M.L^{-3}}$

- accélération = $\dfrac{\text{variation de vitesse}}{\text{durée}}$; $[\text{ vitesse }] = L.T^{-1}$; $[\text{ durée }] = T$

L'accélération a pour équation aux dimensions : $L.T^{-2}$

- force = masse × accélération ; $[\text{ masse }] = M$; $[\text{ accélération }] = L.T^{-2}$

La force a pour équation aux dimensions : $M.L.T^{-2}$

- pression = $\dfrac{\text{force}}{\text{surface}}$; $[\text{ force }] = M.L.T^{-2}$; $[\text{ surface }] = L^2$

La pression a pour équation aux dimensions : $M.L^{-1}.T^{-2}$

- énergie = force × déplacement ;

$$[\text{ force }] = M.L.T^{-2} \; ; \; [\text{ déplacement }] = L$$

L'énergie a pour équation aux dimensions : $M.L^2.T^{-2}$

2. a) P représente la puissance sonore émise par la source et S représente la surface sur laquelle l'énergie sonore se répartit ; cette dernière voit sa taille augmenter avec l'éloignement.

b)

Relation (1) :

$$[I] = \frac{[\text{pression}]^2}{[\text{masse volumique}] \times [\text{vitesse}]} \quad \text{et } [\text{pression}]^2 = M^2.L^{-2}.T^{-4}$$

donc : $[I] = \dfrac{M^2.L^{-2}.T^{-4}}{M.L^{-3} \times L.T^{-1}}$; on obtient : $[I] = M.T^{-3}$

Relation (2) :

$$[I] = \frac{[\text{puissance}]}{[\text{surface}]} \quad \text{et : } [\text{puissance}] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{durée}]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}$$

donc : $[I] = \dfrac{M.L^2.T^{-3}}{L^2}$; on obtient : $[I] = M.T^{-3}$

c) L'intensité sonore, au point M, est notée I : $\boxed{I = \dfrac{P}{4\pi d^2}}$

avec : d = 10 m et $P = 5 \times 10^{-2}$ W   A.N. : $I \cong 4 \times 10^{-5}\ W.m^{-2}$

d) Le niveau sonore et la pression acoustique, au point M, sont respectivement notés $L_I(M)$ et p.

Le niveau sonore s'exprime à l'aide de la relation (1) :

$$\boxed{L_I(M) = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (a)} \qquad \text{A.N. : } L_I(M) \cong 76 \text{ dB}$$

$L_I(M)$ s'exprime aussi à l'aide de la relation (2) :

$$\boxed{L_I(M) = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad (b)}$$

La relation (b) permet de calculer la pression acoustique efficace au point M ; on a, successivement :

$\log \dfrac{p}{p_0} = \dfrac{L_I(M)}{20}$ puis : $\dfrac{p}{p_0} = 10^{\frac{L_I(M)}{20}}$ et : $\boxed{p = p_0 \times 10^{\frac{L_I(M)}{20}}}$ A.N. : $p^{(2)} \cong 126 \times 10^{-3}$ Pa

La relation (1) permet le calcul de la pression acoustique efficace, en M :

$$\boxed{p^{(1)} = \sqrt{I \times \rho \times v}} \qquad \text{A.N.}: p^{(1)} \cong 127 \times 10^{-3}\ \text{Pa}$$

Ces deux pressions efficaces $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ sont très proches.

Remarque : Dans la pratique, il y a une légère différence entre les niveaux de pression acoustique $L_p(M) = 20 \log \frac{p}{p_0}$ et les niveaux d'intensité sonore $L_I(M) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

En effet, la pression acoustique efficace dépend, ainsi qu'on le constate sur la relation (1), de la source sonore et de la propagation de l'onde ; les conditions de température ou d'humidité de l'air, par exemple, influent sur la pression efficace en modifiant la vitesse de propagation de l'onde et la masse volumique de l'air. L'intensité sonore, dans un milieu homogène, isotrope et non dispersif, ne dépend que de la source !

En général, les niveaux sont très proches si l'on se place dans des conditions « idéales » pour l'air : $\rho_0 \cong 1{,}3\ \text{kg.m}^{-3}$ et $v_0 \cong 340\ \text{m.s}^{-1}$ pour lesquelles, on aura : $p_0 = \sqrt{I_0 \times \rho_0 \times v_0}$. C'est le cas, dans cet exercice.

3. a) $p_M = \underbrace{p\sqrt{2}}_{\text{amplitude } p_{max}} \sin \underbrace{2000\,\pi}_{\text{pulsation } \omega}\, t$

$$\text{A.N.}: p_{max} \cong 0{,}18\ \text{Pa} \qquad \text{A.N.}: \omega \cong 6{,}28 \times 10^3\ \text{rad.s}^{-1}$$

La pulsation et la période T vérifient la relation : $\boxed{\omega T = 2\pi}$ A.N. : $T \cong 10^{-3}\ \text{s}$

b) La fréquence f de l'onde est donnée par : $\boxed{f\,(\text{en Hz}) = \frac{1}{T\,(\text{en s})}}$ A.N. : $f \cong 1000\ \text{Hz}$

Le domaine des fréquences audibles s'étend de 20 Hz à 20 kHz. Cette fréquence correspond donc à une fréquence audible.