Compléments sur les installations triphasées équilibrées
(en raisonnant avec les complexes et pas avec les vecteurs de Fresnel)

Rappel :

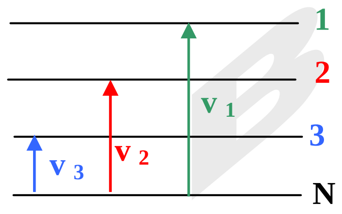
A chaque grandeur instantanée **sinusoïdale**, on associe une grandeur complexe telle que l'on ait :

Grandeur instantanée = Re(grandeur complexe)

A – Tensions simples (système direct) :

Trois tensions sinusoïdales, de même fréquence, forment un système triphasé de tensions si elles sont déphasées les unes par rapport aux autres de + ou - $\frac{2\pi}{3}$.

Le système triphasé est équilibré lorsqu'il est formé de trois tensions ayant même valeur efficace.



Tensions instantanées	Complexes associés
$v_1 = V\sqrt{2}\cos\omega t$	$\underline{v}_1 = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}$
$v_2 = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$	$\underline{v}_2 = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
$v_3 = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$	$\underline{v}_2 = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{+j\frac{2\pi}{3}}$

Rq : On a, bien entendu, $v_1 = \mathrm{Re}(\underline{v}_1)$, $v_2 = \mathrm{Re}(\underline{v}_2)$, …

- Vérifions que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

Pour vérifier ceci, il suffit de vérifier que la partie réelle de la somme $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ est nulle.

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{+j\frac{2\pi}{3}})$$

$$(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{+j\frac{2\pi}{3}}) = [1 + \cos(-\frac{2\pi}{3}) + \cos(+\frac{2\pi}{3}) + j\sin(-\frac{2\pi}{3}) + j\sin(+\frac{2\pi}{3})]$$

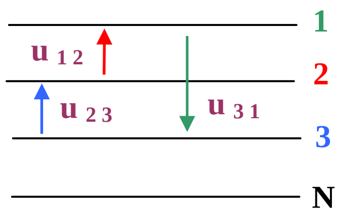
On vérifie, aisément, que cette somme est nulle car :

$$\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\sin(+\frac{2\pi}{3}) \quad \text{et} \quad \cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos(+\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0$ entraîne, en particulier, la nullité de la partie réelle.

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

B – Tensions composées :



Définitions des tensions composées et grandeurs complexes associées :

- $u_{12} = v_1 - v_2$
- $u_{23} = v_2 - v_3$
- $u_{31} = v_3 - v_1$

- $\underline{u}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$
- $\underline{u}_{23} = \underline{v}_2 - \underline{v}_3$
- $\underline{u}_{31} = \underline{v}_3 - \underline{v}_1$

- On en déduit, immédiatement que la somme :

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_1) \quad \text{est nulle.}$$

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$$

- On peut, bien entendu, écrire également, de façon générale :

$$\underline{u}_{12} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_1} \qquad \underline{u}_{23} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_2} \qquad \underline{u}_{31} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_3}$$

Remarque : On peut, pour faciliter les notations, introduire les amplitudes complexes : $\underline{U}_{12} = U\sqrt{2}\, e^{j\varphi_1}$, $\underline{U}_{23} = U\sqrt{2}\, e^{j\varphi_2}$ et $\underline{U}_{31} = U\sqrt{2}\, e^{j\varphi_3}$ ainsi que les amplitudes complexes $\underline{V}_1 = V\sqrt{2}$, $\underline{V}_2 = V\sqrt{2}\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ et $\underline{V}_3 = V\sqrt{2}\, e^{+j\frac{2\pi}{3}}$ afin de s'affranchir de la dépendance en temps des grandeurs mais … attention si l'on doit dériver !.

- Calculons U, φ_1, φ_2 et φ_3.

Pour cela, on identifie les différentes expressions des grandeurs complexes.

- $\underline{u}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}]$

soit : $\underline{u}_{12} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [1 - \cos(-\frac{2\pi}{3}) - j\sin(-\frac{2\pi}{3})]$

on obtient : $\underline{u}_{12} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ce que l'on écrit : $\underline{u}_{12} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, \sqrt{3}\, [\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}]$

En comparant $\underline{u}_{12} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi_1}$ et la dernière expression obtenue, on obtient :

$$U = V\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = +\frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

- $\underline{u}_{23} = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{+j\frac{2\pi}{3}}]$

soit : $\underline{u}_{23} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [-2j\sin(+\frac{2\pi}{3})]$ ou encore : $\underline{u}_{23} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [-j\sqrt{3}]$.

Comme $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, on écrit, enfin : $\underline{u}_{23} = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\sqrt{3}\,[e^{-j\frac{\pi}{2}}]$

En comparant $\underline{u}_{23} = U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi_2}$ et la dernière expression obtenue, on obtient :

$\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ rad que l'on peut écrire aussi : $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

- $\underline{u}_{31} = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,[e^{+j\frac{2\pi}{3}} - 1]$

soit : $\underline{u}_{31} = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,[-1 + \cos(\frac{2\pi}{3}) + j\sin(\frac{2\pi}{3})$ ou encore : $\underline{u}_{31} = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,[-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}]$

puis : $\underline{u}_{31} = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\sqrt{3}\,[-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}]$ et, enfin : $\underline{u}_{31} = V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\sqrt{3}\,e^{j\frac{5\pi}{6}}$

En comparant $\underline{u}_{31} = U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{j\varphi_3}$ et la dernière expression obtenue, on obtient :

$\varphi_3 = +\dfrac{5\pi}{6}$ rad que l'on peut écrire aussi : $\varphi_3 = +\dfrac{5\pi}{6} = +\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

Conclusion :

Les tensions composées forment un système de tensions triphasées équilibré.

La valeur efficace U des tensions composées est reliée à la valeur efficace V des tensions simples par :

$$U = V\sqrt{3}$$

La tension composée u_{12} est en avance de phase de $\dfrac{\pi}{6}$ sur la tension simple v_1.

La tension composée u_{23} est en avance de phase de $\dfrac{\pi}{6}$ sur la tension simple v_2.

La tension composée u_{31} est en avance de phase de $\dfrac{\pi}{6}$ sur la tension simple v_3.

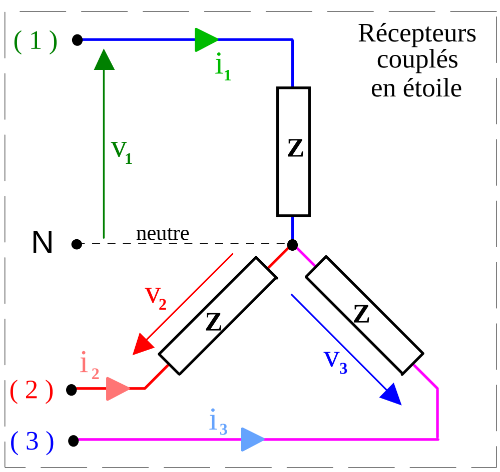
C – Couplage en étoile (récepteur équilibré) :

Le récepteur triphasé est équilibré ; il est constitué de trois dipôles (supposés passifs et linéaires) de même impédance complexe $\underline{Z}$.

Chaque dipôle est soumis à une tension simple ; il est, alors, traversé par un courant d'intensité instantanée i à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{i}$ de valeur efficace I.

$\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}$ (φ dépend des caractéristiques du dipôle)

Z : impédance d'un dipôle.



φ représente, aussi, le déphasage de la tension simple imposée au dipôle sur l'intensité instantanée qui le traverse.

Si le récepteur est équilibré, les intensités i_1, i_2 et i_3 ont la même valeur efficace I : $I = \dfrac{V}{Z}$.

- Dipôle 1 : il est traversé par une intensité instantanée i_1 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{i}_1$ que l'on note : $\underline{i}_1 = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\alpha_1}$ avec $\alpha_1 = -\varphi$
- Dipôle 2 : il est traversé par une intensité instantanée i_2 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{i}_2$ que l'on note : $\underline{i}_2 = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\alpha_2}$ avec $\alpha_2 = -\dfrac{2\pi}{3} - \varphi$
- Dipôle 3 : il est traversé par une intensité instantanée i_3 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{i}_3$ que l'on note : $\underline{i}_3 = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\alpha_3}$ avec $\alpha_3 = +\dfrac{2\pi}{3} - \varphi$

Remarque : De façon générale, on pose : $\underline{v} = V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\theta}$ avec $\theta = 0$, $-\dfrac{2\pi}{3}$, $+\dfrac{2\pi}{3}$ suivant que l'on s'intéresse à la tension simple v_1, v_2 ou v_3.

On écrit : $V\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\theta} = Z\, e^{j\varphi}\, I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\alpha}$ de sorte que l'on a :

$$\theta = \varphi + \alpha$$

Conséquence :

$$\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, \underbrace{[1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{+j\frac{2\pi}{3}}]}_{\substack{\text{(voir tensions simples)} \\ =0}}\, e^{-j\varphi}$$

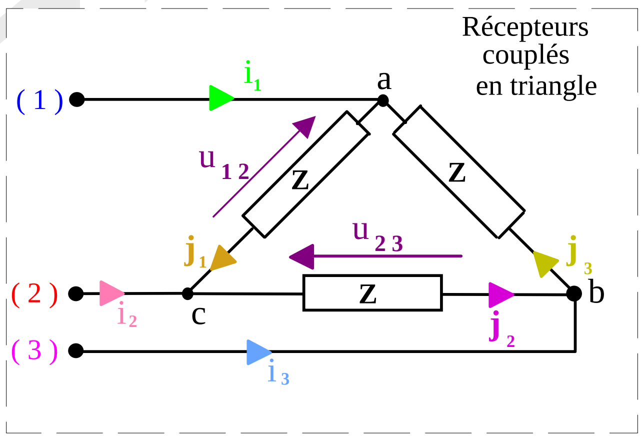
On a donc : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

D – Couplage triangle du récepteur triphasé :

Dans un tel couplage, chaque dipôle (supposé linéaire et passif) du récepteur est soumis à une tension composée (de valeur efficace U).

Si le récepteur est équilibré, les intensités j_1, j_2 et j_3 ont la même valeur efficace J :

$$J = \frac{U}{Z}$$



- Dipôle 1 : il est traversé par une intensité instantanée j_1 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{j}_1$ que l'on note : $\underline{j}_1 = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta_1}$ avec $\beta_1 = \dfrac{\pi}{6} - \varphi$.

- Dipôle 2 : il est traversé par une intensité instantanée j_2 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{j_2}$ que l'on note : $\underline{j_2} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta_2}$ avec $\beta_2 = -\dfrac{\pi}{2} - \varphi$
- Dipôle 3 : il est traversé par une intensité instantanée j_3 sinusoïdale à laquelle on associe la grandeur complexe $\underline{j_3}$ que l'on note : $\underline{j_3} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta_3}$ avec $\beta_3 = +\dfrac{5\pi}{6} - \varphi$

Raisonnement : De façon générale, on pose : $\underline{u} = U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\phi}$ avec $\phi = \dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $+\dfrac{5\pi}{6}$ suivant que l'on s'intéresse à la tension composée u_{12} , u_{23} ou u_{31}.

On écrit : $U\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\phi} = Z\, e^{j\varphi}\, J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta}$ de sorte que l'on a :

$$\phi = \beta + \varphi$$

Conséquence :

$$\underline{j_1} + \underline{j_2} + \underline{j_3} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, \underbrace{[e^{+j\frac{\pi}{6}} + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{+j\frac{5\pi}{6}}]}_{=0}\, e^{-j\varphi}$$

(voir tensions simples)

On a donc : $\underline{j_1} + \underline{j_2} + \underline{j_3} = 0$

Si le dipôle récepteur est équilibré, les intensités forment un système triphasé équilibré.

Relation entre les valeurs efficaces I et J :

Par application de la loi des nœuds, on obtient : $i_1 = j_1 - j_3$ $\quad i_2 = j_2 - j_1$ $\quad i_3 = j_3 - j_2$

On a donc : $\underline{i_1} = \underline{j_1} - \underline{j_3}$ ce qui s'écrit : $\underline{i_1} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{+j\frac{5\pi}{6}}]\, e^{-j\varphi}$

Soit : $\underline{i_1} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [\sqrt{3}]\, e^{-j\varphi}$

On constate que cette expression de l'intensité correspond avec l'expression de $\underline{i_1}$ obtenue au paragraphe précédent c'est-à-dire :

$$\underline{i_1} = I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, e^{-j\varphi}$$

L'identification des deux expressions nous donne : $I = J\sqrt{3}$

On a donc : $\underline{i_2} = \underline{j_2} - \underline{j_1}$ ce qui s'écrit : $\underline{i_2} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{+j\frac{\pi}{6}}]\, e^{-j\varphi}$

Soit : $\underline{i_2} = J\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\, [\sqrt{3}]\left(-j\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) e^{-j\varphi}$

Or, $(-j\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}) = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ de sorte que l'on obtient : $\underline{i}_2 = J\sqrt{2}\,e^{j\omega t}[\sqrt{3}\,]\,e^{-j\frac{2\pi}{3}}\;e^{-j\varphi}$ ce qui correspond à l'expression de $\underline{i}_2$ obtenue au paragraphe précédent.

On a aussi : $\underline{i}_3 = \underline{j}_3 - \underline{j}_2$ ce qui s'écrit : $\underline{i}_3 = J\sqrt{2}\,e^{j\omega t}[e^{+j\frac{5\pi}{6}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}]\,e^{-j\varphi}$

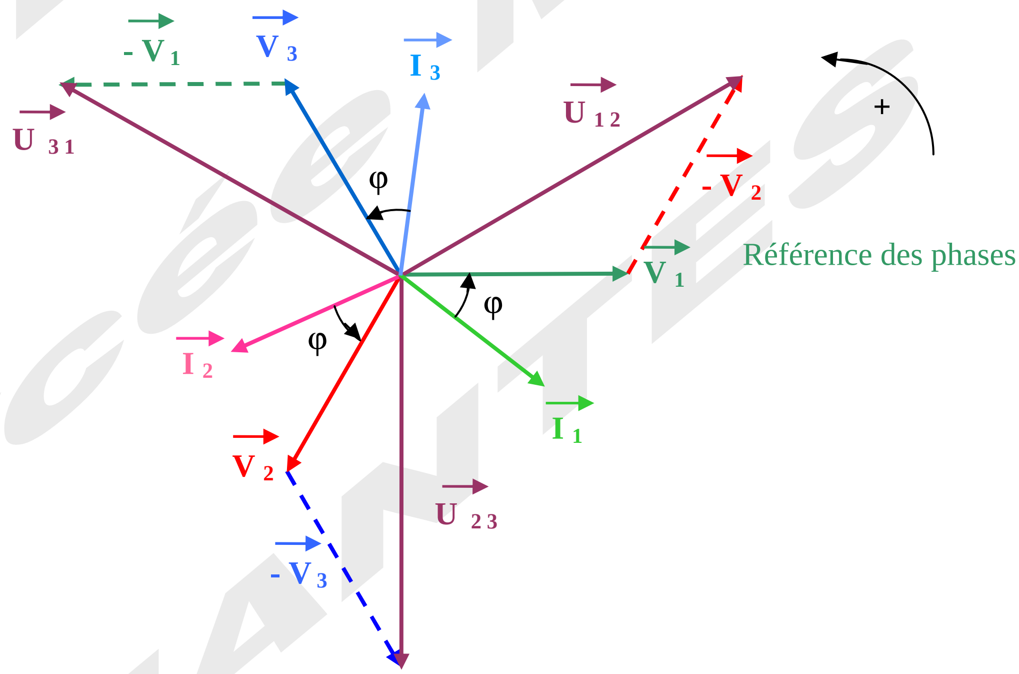
Soit : $\underline{i}_3 = J\sqrt{2}\,e^{j\omega t}[\sqrt{3}\,](-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})\,e^{-j\varphi}$

Or, $(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{+j\frac{2\pi}{3}}$ de sorte que l'on obtient : $\underline{i}_3 = J\sqrt{2}\,e^{j\omega t}[\sqrt{3}\,]\,e^{+j\frac{2\pi}{3}}\;e^{-j\varphi}$ ce qui correspond à l'expression de $\underline{i}_3$ obtenue au paragraphe précédent.

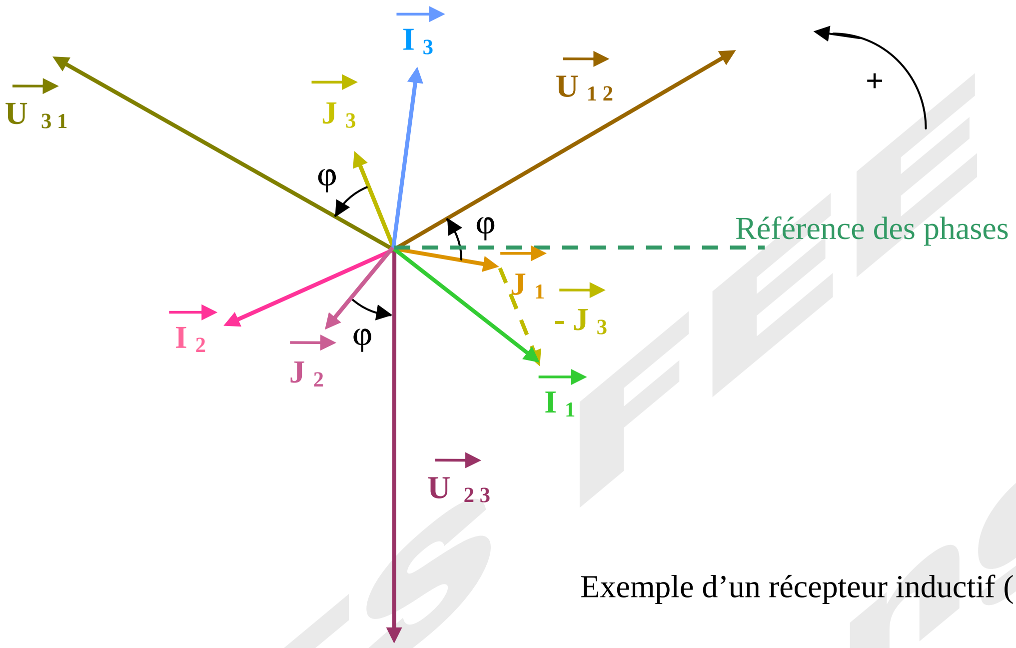
Conclusion : Le couplage (étoile ou triangle) du récepteur ne change absolument pas les intensités en ligne ! On peut donc imaginer, dès à présent, que l'énergie consommée par ce récepteur ne sera pas modifiée par le type de couplage.

E – Représentation de Fresnel :

Dans les deux cas, la référence des phases est la tension simple v_1 !



Exemple d'un récepteur inductif (φ > 0)



Exemple d'un récepteur inductif (φ > 0)

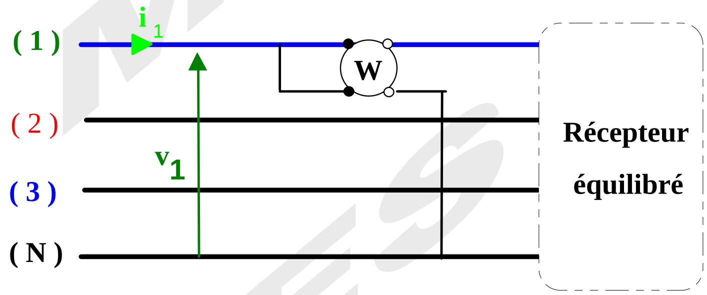
F – Mesure de puissances :

- **Mesure de la puissance active (ligne à 4 fils avec neutre accessible) :**

Soit P_W l'indication du wattmètre.

On a, dans le cas ci-contre :

$$P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{v_1} \times \underline{i_1}^*\right\}$$



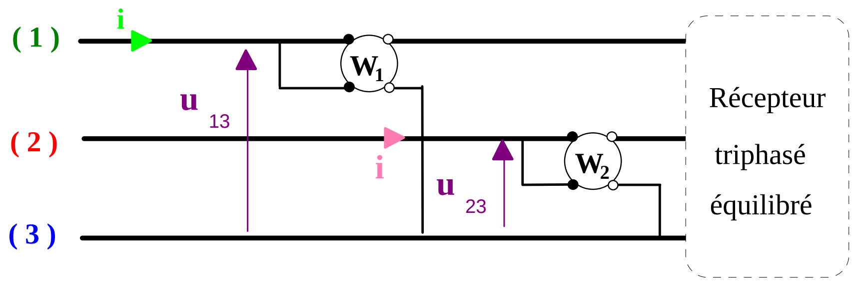
Or, chaque intensité en ligne est déphasée de φ par rapport à la tension simple correspondante c'est-à-dire qu'il y a le même déphasage entre l'intensité i_1 et la tension simple v_1 qu'entre l'intensité i_2 et la tension simple v_2 ou qu'entre l'intensité i_3 et la tension simple v_3. Cette remarque entraîne, de fait, les égalités suivantes :

$$P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{v_1} \times \underline{i_1}^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{v_2} \times \underline{i_2}^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{v_3} \times \underline{i_3}^*\right\}$$

Conséquence : La puissance totale consommée par l'installation (et ceci quel que soit le couplage) est égale à : $P_{tot} = 3\,P_W$

- **Méthode des deux wattmètres** :

Soient P_{W_1} et P_{W_2} les puissances respectives indiquées par les wattmètres.



➢ $P_{W_1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{u_{13}} \times \underline{i_1}^*\right\}$

soit :

$$P_{W_1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ -U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{j\frac{5\pi}{6}} \times I\sqrt{2}\,e^{-j\omega t}\,e^{j\varphi} \right\}$$

ou encore : $P_{W_1} = \mathrm{Re}\left\{ -U\,I\,e^{j\frac{5\pi}{6}}\,e^{j\varphi} \right\}$ que l'on écrit aussi : $\boxed{P_{W_1} = +\frac{U\,I}{2}\left\{\sqrt{3}\cos\varphi + \sin\varphi\right\}}$

➢ $P_{W_2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \underline{u}_{23} \times \underline{i}_2^{\,*} \right\}$

soit : $P_{W_2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{-j\frac{\pi}{2}} \times I\sqrt{2}\,e^{-j\omega t}\,e^{+j\frac{2\pi}{3}}\,e^{j\varphi} \right\}$

ou encore : $P_{W_2} = \mathrm{Re}\left\{ U\,I\,e^{j\frac{\pi}{6}}\,e^{j\varphi} \right\}$ que l'on écrit aussi : $\boxed{P_{W_1} = +\frac{U\,I}{2}\left\{\sqrt{3}\cos\varphi - \sin\varphi\right\}}$

➢ La puissance active totale consommée par l'installation (et ceci quel que soit le couplage) vaut alors :

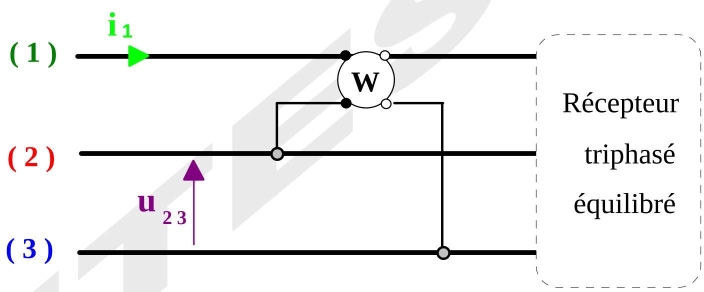
$$\boxed{P_{tot} = U\,I\sqrt{3}\cos\varphi = P_{W_1} + P_{W_2}}$$

Remarque : Cette méthode permet d'accéder, également, à la puissance réactive totale consommée.

$$\boxed{Q_{tot} = U\,I\sqrt{3}\sin\varphi = \sqrt{3}\,(P_{W_1} - P_{W_2})}$$

- **Mesure de la seule puissance réactive** :

Soit P_W l'indication du wattmètre.



$$P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \underline{u}_{23} \times \underline{i}_1^{\,*} \right\}$$

soit :

$$P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ U\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,e^{-j\frac{\pi}{2}} \times I\sqrt{2}\,e^{-j\omega t}\,e^{j\varphi} \right\}$$

que l'on peut écrire : $P_W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ 2\,U\,I\,(-j)\,e^{j\varphi} \right\}$ puis : $P_W = U\,I\sin\varphi$

On a donc : $\boxed{Q_{tot} = U\,I\sqrt{3}\sin\varphi = \sqrt{3}\,P_W}$