Pompe à chaleur air-air – Corrigé

Les questions sont indépendantes.

On étudie une pompe à chaleur air-air. Le but de l'exercice est de déterminer son efficacité à chauffer un local. Cette machine thermique fonctionne avec une source froide (extérieur du local) dont la température est $\theta_A = -8\,°C$. La source chaude est constituée par l'intérieur du local dont la température est $\theta_B = +20\,°C$.

Dans cette machine, une quantité de matière d'air, n, décrit le cycle suivant.

$A \to B$: compression adiabatique réversible ; la température évolue de θ_A à θ_B.

$B \to C$: compression isotherme.

$C \to D$: détente adiabatique réversible.

$D \to A$: détente isotherme.

Chaque état du système est caractérisé par sa pression p, son volume V et sa température T (en kelvin).

Dans toute cette étude, l'air est considéré comme un gaz parfait.

Données :

Au point A

- Température : $T_A = 265\ \mathrm{K}$;
- pression : $p_A = 1{,}50 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$;
- volume : $V_A = 0{,}800\ \mathrm{m}^3$.

Au point B :

- Température : $T_B = 293\ \mathrm{K}$.

Au point C :

- pression : $p_C = 3{,}50 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$;
- Capacité thermique molaire à volume constant : $C_V = 20{,}8\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$;
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$;
- Coefficient adiabatique : $\gamma = 1{,}40$;
- Relation de Laplace pour une transformation adiabatique et réversible : $T\,V^{\gamma-1} = \text{constante}$.

1° question : L'équation d'état du gaz parfait dans l'état A s'écrit : $p_A\,V_A = n\,R\,T_A$; on en déduit :

$$\boxed{n = \frac{p_A\,V_A}{R\,T_A}} \qquad \boxed{\text{A.N. } n \cong 54{,}5\ \mathrm{mol}}$$

2° question : L'évolution $A \to B$ du gaz parfait est adiabatique et réversible ; la relation de Laplace s'applique : $T_B\,V_B^{\gamma-1} = T_A\,V_A^{\gamma-1}$. On en déduit :

$$\boxed{V_B = V_A\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \qquad \boxed{\text{A.N. } V_B \cong 0{,}62\ \mathrm{m}^3}$$

3° question :

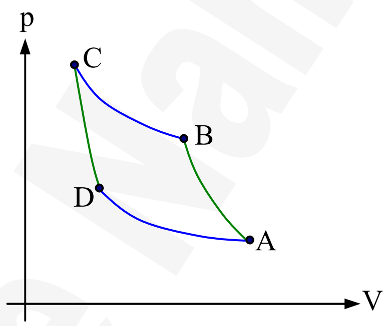
Dans l'état B, l'équation d'état du gaz s'écrit : $p_B\ V_B = n\ R\ T_B$

Dans l'état C, l'équation d'état du gaz s'écrit : $p_C\ V_C = n\ R\ T_C = n\ R\ T_B$ car : $T_C = T_B$.

On a donc : $p_B\ V_B = p_C\ V_C$ ce qui donne : $\boxed{V_C = V_B \dfrac{p_B}{p_C}}$ A.N. $V_C \cong 0{,}38\ m^3$

4° question :

Les isothermes sont en bleu et les adiabatiques en vert.



5° question :

a) L'évolution $A \rightarrow B$ est adiabatique : $\boxed{Q_{AB} = 0}$.

b) Le premier principe est appliqué à l'évolution $A \rightarrow B$: $W_{AB} + Q_{AB} = \Delta U_{AB}$

Avec $Q_{AB} = 0$, on a : $\boxed{W_{AB} = \Delta U_{AB}}$

Pour un gaz parfait, on a : $\Delta U_{AB} = n\, C_V\, (T_B - T_A)$ (première Loi de Joule)

Donc le travail reçu par l'air lors de l'évolution $A \rightarrow B$ est donné par la relation : $\boxed{W_{AB} = n\, C_V\, (T_B - T_A)}$

c) *Application numérique* : $W_{AB} \cong 31{,}7\ kJ$.

6° question :

a) Le travail élémentaire des forces de pressions est : $-\,p\, dV$

Le travail W_{BC} se calcule ainsi : $W_{BC} = -\displaystyle\int_{V_B}^{V_C} p\, dV$

L'évolution $B \rightarrow C$ est isotherme : $p = \dfrac{n\ R\ T_B}{V}$ ($n\ R\ T_B$ est constante)

On a donc : $W_{BC} = -\,n\ R\ T_B \displaystyle\int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V}$ puis : $\boxed{W_{BC} = -\,n\ R\ T_B\ \ln \dfrac{V_C}{V_B}}$

b) *Application numérique* : $W_{BC} \cong 65{,}8\ kJ$

c) Pour un gaz parfait, on a : $\Delta U_{BC} = n\, C_V\, (T_C - T_B)$ (première Loi de Joule) soit : $\Delta U_{BC} = 0$ puisque l'évolution considérée est isotherme ; dans ce cas, on a : $W_{BC} + Q_{BC} = 0$ soit :

$\boxed{Q_{BC} = -\,W_{BC}}$ $Q_{BC} \cong -\,65{,}8\ kJ$

Q_{BC} est négative : l'air fournit de la chaleur à l'intérieur du local.

7° question : On note Q_{DA} la échangée par l'air avec le milieu extérieur lors de l'évolution $D \rightarrow A$:

a) L'efficacité e de cette machine s'écrit : $\boxed{e = \dfrac{-Q_{BC}}{W_{cycle}}}$

b) Premier principe appliqué au cycle : $W_{cycle} + Q_{BC} + Q_{DA} = (\Delta U)_{cycle}$

Avec $(\Delta U)_{cycle} = 0$ (U est une fonction d'état), on écrit : $W_{cycle} = -(Q_{BC} + Q_{DA})$

On a donc : $e = \dfrac{-Q_{BC}}{-(Q_{BC} + Q_{DA})}$ ou : $\boxed{e = \dfrac{Q_{BC}}{Q_{BC} + Q_{DA}}}$

c) Application numérique : $\boxed{e \cong 10{,}5}$

d) Pour obtenir une énergie thermique de $10{,}5\ \text{J}$ (chauffage du local), l'utilisateur de la PAC doit fournir une énergie mécanique de $1\ \text{J}$.