

Corrigé de l'épreuve de BTS 95

A – On néglige les pertes

1° question :

Soit Q l'énergie nécessaire pour amener l'eau du ballon de $\theta_e = 10^\circ\text{C}$ à $\theta_f = 60^\circ\text{C}$.

$$Q = V \rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (\theta_f - \theta_e)$$

$$\text{A.N. : } Q = 4,18 \cdot 10^7 \text{ J}$$

2° question : La puissance P de chauffage est telle que : $P = \frac{Q}{t_0}$; on a donc : $t_0 = \frac{Q}{P}$

Attention ! Q est en joules (J) et P en watts (W) : la durée est en secondes (s) il faut l'exprimer avec une unité mieux adaptée.

Le résultat de l'opération donne $t_0 = 2,09 \cdot 10^4$ s soit 5,81 h.....

Pour convertir les heures en h et en minutes, on écrit que 0,81 h se note aussi $\frac{81}{100} \times 1\text{h}$ soit

$$\frac{81}{100} \times 60 \text{ min !}$$

$$\text{A.N. : } t_0 = 5 \text{ h } 48 \text{ min}$$

B – On tient compte des pertes liées à la réalisation technologique du ballon

1° question : La puissance perdue p est proportionnelle à l'écart de température. On écrit :

$$p = a (\theta - \theta_e) \quad (a \text{ est une constante})$$

$$\text{A.N. : } a = 1 \text{ W} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

a est le coefficient directeur de la droite ! Attention ! en physique, le coefficient directeur représente souvent une grandeur qu'il faut donc exprimer avec son unité !

2° question : a) La chaleur dq nécessaire pour élever une masse m d'eau de $d\theta$ s'écrit :

$$\text{A.N. : } dq = m c_{\text{eau}} d\theta$$

b) La chaleur perdue pendant la durée dt s'écrit :

$$dq' = p dt = a (\theta - \theta_e) dt$$

c) Le chauffage fournit, pendant l'intervalle de temps dt , l'énergie $P dt$. Cette énergie sert, en partie, à élever la température de l'eau de $d\theta$; une autre partie est perdue.

Le bilan énergétique du système {eau + ballon} se note, alors :

$$P dt = m c d\theta + a (\theta - \theta_e) dt$$

3° question : La relation précédente se note aussi :

$$[P - a (\theta - \theta_e)] dt = m c d\theta \quad \text{soit :}$$

$$dt = \frac{m c}{P - a (\theta - \theta_e)} d\theta$$

La durée $\Delta t = t' - t_0$ représente l'intégrale $\int_{t=t_0}^{t=t'} dt$; on a donc :

$$\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} \frac{m c}{P - a (\theta - \theta_e)} d\theta$$

D'autre part, on peut écrire : $d[P - a (\theta - \theta_e)] = -a d\theta$ soit : $-\frac{1}{a} d[P - a (\theta - \theta_e)] = d\theta$

$$\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} -\frac{1}{a} \frac{m c d[P - a(\theta - \theta_e)]}{P - a(\theta - \theta_e)} = -\frac{m c}{a} \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} \frac{d[P - a(\theta - \theta_e)]}{P - a(\theta - \theta_e)}$$

Comme la grandeur $[P - a(\theta - \theta_e)]$ est positive, l'intégrale se calcule aisément :

$$\Delta t = -\frac{m c}{a} \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} \frac{d[P - a(\theta - \theta_e)]}{P - a(\theta - \theta_e)} = -\frac{m c}{a} \ln \frac{P - a(\theta_f - \theta_e)}{P}$$

On obtient, enfin :

$$\Delta t = \frac{m c}{a} \ln \frac{P}{P - a(\theta_f - \theta_e)}$$

$$\text{A.N. : } \Delta t = 2,12 \cdot 10^4 \text{ s soit } 5 \text{ h } 53 \text{ min}$$

Remarque : Le calcul de l'intégrale peut être effectué en utilisant le calcul du texte !

Il faut rapprocher l'expression :

$$\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} \frac{m c}{P - a(\theta - \theta_e)} d\theta$$

de l'intégrale

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K}{A - B\theta} d\theta$$

On identifie A à $(P + a\theta_e)$, B au terme a et K au produit m c.

4° question : On constate que l'isolation du réservoir est de très bonne qualité ; la puissance perdue est faible et, par conséquent, la durée Δt n'est guère éloignée de la valeur calculée au A - 2° (pertes négligées).