Propagation de la chaleur dans une barre non isolée – *Rappels théoriques*

La barre étudiée a une longueur L et une section droite S (rayon r). L'une de ses extrémités est portée à la température fixe T_1, l'autre extrémité est libre. Comme $L >> r$, on admet (et ceci est vérifié expérimentalement) que la température de l'extrémité libre est égale à la température ambiante T_a.

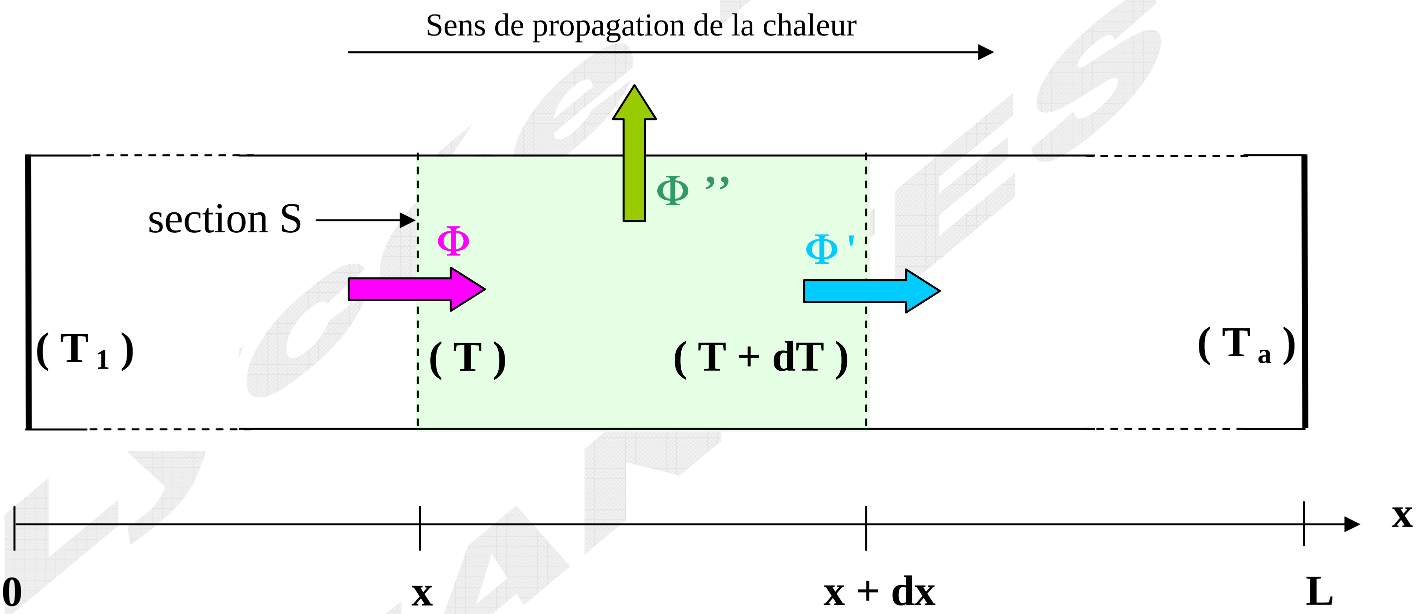
La barre est homogène et isotrope de sorte que les surfaces isothermes sont perpendiculaires à la direction de propagation de la chaleur. On note λ la conductivité thermique moyenne du matériau constituant la barre (on admet que celle-ci est constante).

Le bilan de puissance est réalisé en régime permanent ; les puissances thermiques, les températures ne dépendent, alors, plus du temps.

On considère une tranche de barre de longueur dx, comprise entre deux surfaces isothermes de températures T et $T' = T + dT$.

On note :

- Φ la puissance thermique reçue, par conduction, par la tranche dx considérée, à travers la sectio de surface S,
- Φ' la puissance thermique perdue, par conduction, par cette même tranche, à travers la surface S,
- Φ'' la puissance thermique perdue, par la tranche considérée, par convection, à travers la surface latérale $ds = 2\,\pi\,r\,dx$.



La conservation de la puissance thermique, pour la tranche considérée, s'écrit :

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' \quad \text{(relation A)}$$

avec $\Phi = -\lambda\,S\,\dfrac{dT}{dx}$, $\Phi' = -\lambda\,S\,\dfrac{d(T+dT)}{dx}$; $\Phi'' = h\,ds\,(T - T_a)$

La puissance thermique Φ' s'écrit également : $\Phi' = -\lambda S \dfrac{d}{dx}\left(T + \dfrac{dT}{dx} dx \right)$ soit :

$$\Phi' = -\lambda S \frac{dT}{dx} - \lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

Montrer, alors, que la relation A s'écrit, en définitive :

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha^2 (T - T_a) = 0}$$

Exprimer α en fonction des grandeurs h, r et λ.

Chercher une solution de cette équation différentielle du second degré.